ゲージグラス模型の非平衡緩和解析

東京工業大学 院理工　尾関 之康，小川 京太

1　ゲージグラス模型

ゲージグラス模型は、XY 模型にランダムな位相のずれが入ったもので、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j + \omega_{ij}) \tag{1}$$

で与えられる。ϕ_i はスピンの角度変数、ω_{ij} は位相のずれを表すランダム変数で、共に $[0, 2\pi)$ の値をとる。この模型は、XY 模型にランダムな DM 相互作用が入った磁性体や、磁場中の超伝導微粒子を記述し [1]-[4]、特に後者の場合には対応する実験も行われている。この場合、ハミルトニアンは微粒子間の Josephson 結合による相互作用を表していて、スピン変数 ϕ_i は超伝導位相、ランダム変数 ω_{ij} は i サイトから j サイトまでのベクトルポテンシャルの線積分で与えられる。

$$\omega_{ij} = \frac{2e}{\hbar c} \int_{\boldsymbol{r}_i}^{\boldsymbol{r}_j} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

超伝導微粒子の大きさにばらつきがあり、中心が正規の格子点からずれると、ω_{ij} もランダムに分布するようになる。理論ではランダムネスは理想化し、各変数が独立に

$$p(\omega_{ij}; D) \propto \exp(D \cos \omega_{ij})$$

の分布に従うとする。変数 D はランダムネスの強さを表し、$D = 0$ は full-randam に、$D = \infty$ は non-random に対応している。この分布は見慣れない形をしているが、ガウス分布と大差無い。実際ハミルトニアンを周期型ガウス模型にして、ω_{ij} をガウス分布としても、同様の振舞が期待されている。予想される相図を図 1 に示す。

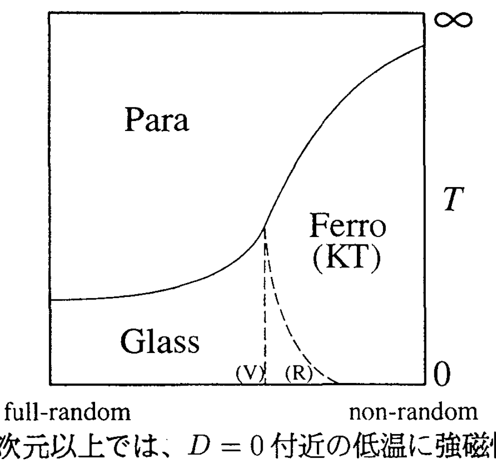

図 1：ゲージグラス模型の相図
二次元では強磁性相が KT 相になる。多重臨界点以下での強磁性相境界が垂直 (V) になるかリエントラント (R) になるかが問題になっていた。また、KT 相が安定に存在するかも未解決。

三次元以上では、$D = 0$ 付近の低温に強磁性相が、D が大きくなるとグラス相が現れる [2]。これは、Edwards-Anderson 型のランダム XY 模型にスピングラス転移が無いと言われている現状と

は対照的である。二次元では、グラス転移は無く、強磁性相は Kosterlitz-Thouless 相に代わる。KT 相境界の低温での形がリエントラント的 (R) か垂直 (V) かについては、理論と実験の両面から論争になっていたが、近年は垂直派が優勢になっている [3]。しかし、一方で KT 相のランダムネスに関する不安定性も指摘され、$D < \infty$ 領域での KT 相の不在を主張する理論もあり [4]、結論は出ていない。

2 非平衡緩和法

相互作用がランダムなスピングラス系の平衡シミュレーションは、フラストレーションによる遅い緩和とランダムネスの平均操作の手間のため、平衡状態の確認が難しく、解析可能なサイズが極端に小さくなり、物理的な結論を得るのが難しい。非平衡緩和法は、秩序化した状態からの秩序変数の非平衡緩和をシミュレートし、相転移を解析する方法で、統計平均は MC ステップの時間平均ではなく、独立なサンプリングで行なう。系の平衡化から解放されるので、スピン数がこれまでの数十倍以上の格子を容易に解析でき、MC ステップは動的性質が判る程度の小ステップで十分になり、高精度な結果を効率良く実現する [5, 6]。

通常の二次相転移の場合には、(完全) 秩序状態を初期状態に設定する。系の秩序変数 $m(t)$ の緩和の様子を調べ、漸近形が冪緩和する温度を臨界点とする。実用的には log 微分をとり、

$$\lambda(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\log m(t)}{\mathrm{d}\log t} \sim \begin{cases} \infty & (T > T_{\mathrm{c}}) \\ \beta/z\nu & (T = T_{\mathrm{c}}) \\ 0 & (T < T_{\mathrm{c}}) \end{cases} \tag{3}$$

で定義される局所指数によって、臨界点と臨界指数を決定する。この方法では、臨界温度の上限と下限を大きな系で見積もるので、信頼性のある結果が期待される。しかし、Kosterlitz-Thouless(KT) 相転移やスピングラス転移では、低温相で有限値に漸近する動的秩序変数を定義することが難しく、転移温度以下で常に冪緩和する緩和関数で解析せざるを得ないのが現状である。このような場合に転移温度の下限を求めるのは、強磁性の場合に比べて難しくなるが、以下で提案するようなスケーリング関係を用いることによって解析は可能である。

3 二次元 Kosterlitz-Thouless 相の安定性

二次元古典 XY 模型では、低温に強磁性相は現れないが、ある温度以下で相関距離が発散する臨界的な相が存在する。これは KT 相と呼ばれ、スピンが渦対を形成することによってエネルギーを下げている。通常の二次転移では相関距離は臨界点に向かって冪的に発散するが、KT 転移では指数関数的に発散するため、KT 相を平衡シミュレーションで解析する場合に、大きな系を扱うのが困難になる。

非平衡緩和法で KT 転移を解析する場合、強磁性同様に磁化緩和を観測する。この場合、サイズを大きくするのは容易になるが、磁化は転移温度以下で常に冪緩和するので、局所指数で見ると低温で常に有限値に漸近し、強磁性転移のような下限の見積もり (0 に漸近する温度) が出来ない。例として、$1/T = D$ に沿って計測した磁化緩和の局所指数を図 2 に示す。

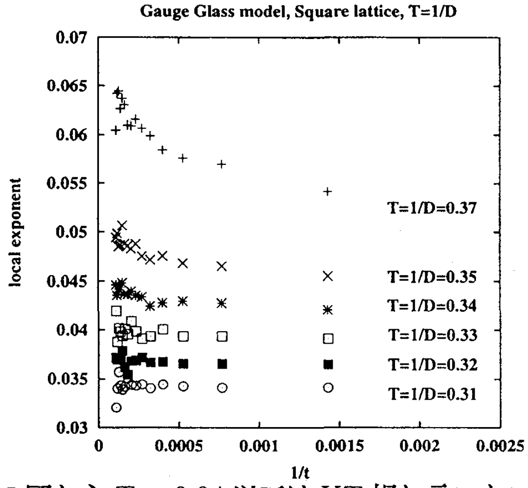

図２：二次元の $K=D$ 上の磁化の局所指数
$T=0.35$ 以上では、$1/t=0$ で漸近的に ∞ に向かい常磁性的に、$T=0.34$ 以下では、$1/t=0$ で漸近的に有限値に向かい臨界的に振舞う様子が見える。
温度はすべて J/k_{B} 単位で議論する。

この図から $T<0.34$ 以下は KT 相と言いたいが、この振舞いは観測時間内で見えているだけで、さらに長時間の振舞いが臨界的と結論することはできない。ここで言えるのは $T\geq 0.35$ は常磁性であること、すなわち $T=0.35$ が T_{KT} の上限ということのみである。

非平衡緩和法によって KT 転移温度を正確に決めるために、スケーリング式を利用する。

$$m(t,\varepsilon)=\tau(\varepsilon)^{-\lambda}\bar{m}(t/\tau(\varepsilon)) \tag{4}$$

ここで、$\varepsilon\equiv T-T_{\mathrm{KT}}$、$\tau(\varepsilon)$ は温度 ε における緩和時間を表す。式 (4) によって各温度における緩和時間 $\tau(\varepsilon)$ を決定する。縦軸に $m(t,\varepsilon)\tau(\varepsilon)^{\lambda}$、横軸に $1/t$ として、log-log プロットしたものを図３に示す。独立なパラメーターは λ と τ であり、パラメーターの変化は曲線の平行移動を起こすのみなので、プロットは比較的容易にできる。

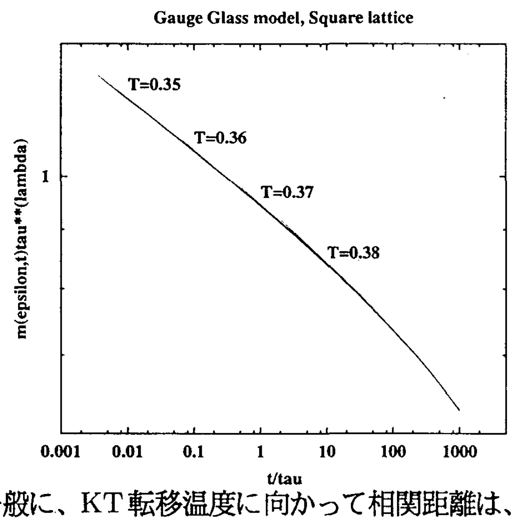

図３：磁化緩和のスケーリングプロット
$T=0.38$ で $\tau=10$ を仮定して、$T=0.37$ で $\tau=44$、$T=0.36$ で $\tau=310$、$T=0.37$ で $\tau=5700$ によってプロットした。

一般に、KT 転移温度に向かって相関距離は、二次相転移のように冪的にではなく、$\xi\sim\exp(a/\sqrt{\varepsilon})$ のように指数関数的に発散する。そこで、緩和時間も同様に発散すると仮定する。

$$\tau(\varepsilon)=b\exp(a/\sqrt{\varepsilon}) \tag{5}$$

式 (5) を使って、上で求めた緩和時間から KT 転移温度を見積もる。KT 転移温度を仮定して、式 (5) に対して最小二乗法を行い、残差が最小になる温度を T_{KT} とした。ここでは、最小の残差を与える $T_{\mathrm{KT}}=0.32$ とした結果を図４に示す。これは図２の振舞いとも矛盾していない。

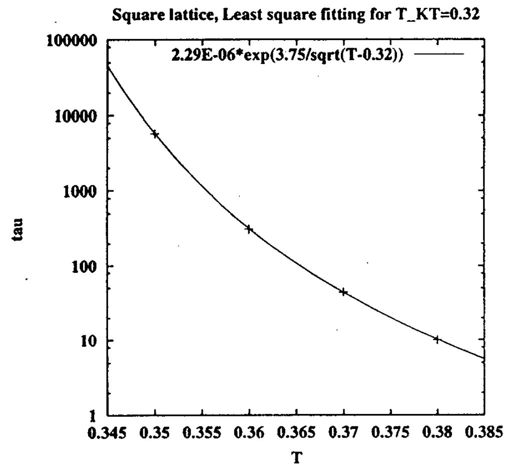

図4 : $\tau(\varepsilon)$ と最小二乗フィット
前図で求められた $\tau\varepsilon$ を $T_{\rm KT} = 0.32$ として、式 (5) に最小二乗フィットさせた。

この解析は KT 転移を仮定して行っているが、式 (5) に合うような緩和時間の発散が見られるのは、この仮定が間違っていないことを示唆している。これは、KT 相がランダムネスに対して不安定であるという一部の指摘 [4] を否定する結果になる。

4 まとめ

二次元ゲージグラス模型の KT 転移の安定性を非平衡緩和法で解析した。これまで難しかった KT 転移温度の非平衡緩和関数による評価を、スケーリング関係を利用して解決した。これによって、KT 相は小さなランダムネスに対して安定であり、低温における境界が垂直であるというこれまでの予想を支持することになった。スケーリングによる転移温度の評価は、同様の困難を抱えるスピングラス転移の解析にも有効である [6]。

参考文献

[1] M. Rubinstein, B.shraiman and D. R. Nelson: Phys. Rev. B **27** (1983) 1800; M. G. Forrester, H. J. Lee, M. Tinkham and C. J. Lobb: Phys. Rev. B **37** (1988) 5966.

[2] D. A. Huse and H. S. Seung, Phys. Rev. B **42** (1990) 1059; C. Wengel and A. P. Young, Phys. Rev. B **56** (1997) 5918; J. Maucourt and D. R. Grempel, Phys. Rev. B **58** (1998) 2654; J. M. Kosterlitz and N. Akino, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4672.

[3] M. J. P. Gingras and S. Sørensen, Phys. Rev. B **46** (1992) 3441; Y. Ozeki and H. Nishimori: J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) 3399. T. Nattermann, S. Scheidl, S. E. Korshunov, and M. S. Li, Phys. I (France) **5** (1995) 565.

[4] S. E. Korshunov: Phys. Rev. B **48** (1993) 1124; C. Mudry and X-G. Wen: Nucl. Phys. B**549** 613.

[5] D. Stauffer, Physica A **186** (1992) 197; N. Ito, Physica A **192** (1993) 604, **196** (1993) 591; Y. Ozeki and N. Ito, J. Phys. A bf 31 (1998) 5451; N. Ito, K. Ogawa, K. Hukushima and Y. Ozeki, J. Phys. Soc. Jpn. **69** (2000).

[6] Y.Ozeki and N. Ito, submitted to Phys. Rev. B.